О кривизне пространственных кривых в пространстве Лобачевского

Д. Д. Мордухай-Болтовской (Пятигорск)

Введение

Литература, относящаяся к пространственным кривым в неэвклидовом пространстве, довольно бедна. Все наиболее существенное, ныне известное, находим в книге Кулиджа [1]. Бианки в своих лекциях по дифференциальной геометрии [8] собирает то, что находится в его статьях на эту тему. Как и у Кулиджа, у него имеется только одно понятие кривизны и одно понятие о кручении, причем устанавливаются они несколько искусственно. Следует отметить очень важные формулы — аналог формул Френэ, которые даются обоими авторами, но в настоящей статье не находят себе применения. Центр интереса обоих авторов лежит в теории поверхностей. Материал, относящийся к кривым, трактует преимущественно *специальные* кривые.

В настоящей статье я не задаюсь широкой целью дать систематическое изложение теории пространственных кривых; такое изложение, естественно, будет содержать части, построение которых, при наличии соответствующих образцов из эвклидовой геометрии, не будет представлять особых затруднений, и дело это в особенности может быть рекомендовано молодым математикам, изучившим элементарную неэвклидову геометрию. Я думаю, что едва ли, кроме разве некоторых основных формул, через вывод которых я должен был пройти в целях удобства читателя, в моей статье можно усмотреть какие-либо серьезные повторения уже известных результатов.

Мне представляется новым и двоякое понимание кривизны, и формула для кручения, и вывод зависимости между кручением, кривизной по касательной и полной кривизной, и учение о кривизне по нормальной плоскости. Но я обращаю особое внимание на чисто геометрические выводы второй части работы.

Некоторые сведения, относящиеся к плоским кривым

1. На плоскости Лобачевского следует различать две кривизны: K_t — кривизну по касательной и K_n — кривизну по нормали. Первая является пределом отношения угла смежности к дуге, вторая — пределом отношения угла между нормалями к дуге.

2. Обозначая через (x', y', z'), (x'', y'', z'') производные, взятые по дуге s, будем иметь в вейерштрассовых координатах (т. е. таких, что

$$x = k \operatorname{sh} \frac{\overline{QM}}{k}, \quad y = k \operatorname{sh} \frac{\overline{PM}}{k}, \quad z = \operatorname{ch} \frac{\overline{OP}}{k},$$

где $\overline{MQ}$, $\overline{MP}$ — перпендикуляры, опущенные на оси координат Ox и Oy, $\overline{OP}$ — расстояние от начала координат, k — параметр пространства):

$$K_n = \sqrt{x''^2 + y''^2 - k^2 z''^2}.$$

3. Доказывается, что

$$K_n = \frac{1}{k \operatorname{sh} \frac{d_n}{k}},$$

где d_n — отрезок нормали, отсекаемый бесконечно близкой нормалью (радиус кривизны).

4. В случае параллельности бесконечно близких нормалей $d_n = \infty$. В случае сверхпараллельности K_n имеет *мнимое* значение; тогда кривизны по нормали не существует.

5. В последнем случае следует уже говорить о сверхкривизне по нормали $K^{(n)}$, как о пределе величины $\frac{1}{k} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$, где $\Delta\sigma$ — кратчайшее расстояние между нормалями.

6. На основании известных свойств трипрямоугольника доказывается, что

$$K^{(n)} = \frac{1}{k \operatorname{ch} \frac{d^{(n)}}{k}},$$

где $d^{(n)}$ — расстояние от прямой наименьшего расстояния между нормалями (т. е. от оси кривизны).

В этой работе я главным образом использую свойства трипрямоугольника, излагаемые в моей статье [4].

I. Аналитические исследования

§ 1. Кривизна по нормальной плоскости

Естественным определением кривизны в пространстве Лобачевского является следующее: кривизна рассматривается как

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s},$$

где $\Delta\omega$ — угол между нормальными плоскостями в точке M и в бесконечно близкой к ней точке M'.

Замечая, что уравнением нормальной плоскости в вейерштрассовых координатах в точке (x, y, z, u) является

$$x'X + y'Y + z'Z - k^2 u'U = 0, \tag{1}$$

и предполагая, что кривая задана уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(s), \\ y &= \psi(s), \\ z &= \chi(s), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где s — длина дуги, и что x', y', z', u' означают производные по s, а уравнением нормальной плоскости в бесконечно близкой к M точке M' является

$$(x' + x''\Delta s) X + (y' + y''\Delta s) Y + (z' + z''\Delta s) Z - k^2 (u' + u''\Delta s) U = 0, \qquad (1')$$

мы найдем:

$$\cos \Delta\omega = \frac{x' (x' + x''\Delta s) + \cdots}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2 - k^2 u'^2}\sqrt{(x' + x''\Delta s)^2 + \cdots}} .$$

Отсюда нетрудно получить, замечая, что

$$\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - k^2 u^2 &= -k^2, \\ x'^2 + y'^2 + z'^2 - k^2 u'^2 &= 1, \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и отбрасывая бесконечно малые высших порядков:

$$\sin \Delta\omega = \frac{\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - k^2 u''^2}\,\Delta s}{\sqrt{(x' + x''\Delta s)^2 + \cdots}} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - k^2 u''^2}\,\Delta s.$$

Следовательно,

$$K_n = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\sin \Delta\omega}{\Delta\omega} \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - k^2 u''^2}. \qquad (4)$$

Таким образом введенная кривизна и будет кривизной по нормальной плоскости, и мы будем ее обозначать через K_n. В том случае, когда берется *плоская* кривая, пересечение ее плоскости с нормальной плоскостью даст нормаль и $\Delta\omega$ будет углом между двумя бесконечно близкими нормалями. Если кривую брать на плоскости XY, то будем иметь:

$$K_n = \sqrt{x''^2 + y''^2 - k^2 u''^2} \qquad (4')$$

(кривизна плоской кривой *по нормали*).

§ 2. Кривизна в соприкасающейся плоскости

Нам необходимо указать *другое* геометрическое значение кривизны по нормальной плоскости.

Спроектируем кривую на ее соприкасающуюся плоскость в точке $M(x, y, z, u)$ и определим для ее проекции *кривизну по нормали, как кривизну плоской кривой по нормали.* Мы увидим, что она окажется как раз равной кривизне данной кривой по нормальной плоскости.

Найдем сначала уравнение соприкасающейся плоскости, которую мы определяем, как предельное положение плоскости, проходящей через 3 бесконечно близкие точки:

$$M(x, y, z, u), \quad M'(x + \Delta_1 x,\ y + \Delta_1 y,\ z + \Delta_1 z,\ u + \Delta_1 u),$$
$$M''(x + \Delta_2 x,\ y + \Delta_2 y,\ z + \Delta_2 z,\ u + \Delta_2 u),$$
$$\Delta_1 x = x'\Delta_1 s + \frac{x''}{1\cdot 2}(\Delta_1 s)^2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_2 x = x'\Delta_2 s + \frac{x''}{1\cdot 2}(\Delta_2 s)^2 + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если уравнение соприкасающейся плоскости написать в виде

$$ax + by + cz - k^2 du = 0, \tag{5}$$

то для определения коэффициентов a, b, c, d получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} ax + by + cz - k^2 du &= 0,\\ ax' + by' + cz' - k^2 du' &= 0,\\ ax'' + by'' + cz'' - k^2 du'' &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$a = -\lambda k^2 \delta_{yzu}, \quad b = \lambda k^2 \delta_{zux}, \quad c = -\lambda k^2 \delta_{uxy}, \quad d = -\lambda \delta_{xyz}, \tag{6}$$

где

$$\delta_{yzu} = \begin{vmatrix} y & z & u \\ y' & z' & u' \\ y'' & z'' & u'' \end{vmatrix}$$

и выражения для δ_{zux}, δ_{uxy}, δ_{xyz} получаются из выражения для δ_{yzu} круговой перестановкой букв x, y, z, u. Поэтому уравнение соприкасающейся плоскости можно в окончательном виде представить так:

$$\delta_{yzu} X - \delta_{zux} Y + \delta_{uxy} Z - \delta_{xyz} U = 0. \tag{7}$$

Примем: 1) соприкасающуюся плоскость за плоскость XY, 2) нормальную плоскость за плоскость YZ, 3) спрямляющую плоскость за плоскость XZ. Координатами точки M тогда будут

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad u = 1. \tag{8}$$

Так как уравнение нормальной плоскости (1) должно обратиться в $X = 0$, то

$$y' = 0, \quad z' = 0, \quad u' = 0; \tag{9}$$

а так как

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - k^2 u'^2 = 1, \tag{10}$$

то $x' = \pm 1$ и при надлежащем выборе направления осей координат

$$x' = 1 \tag{9'}$$

(если ось OX идет в направлении отсчета дуги). Далее, имея еще в виду, что уравнение (7) соприкасающейся плоскости должно свестись к $Z = 0$, будем иметь:

$$\delta_{yzu} = 0, \quad \delta_{zux} = 0, \quad \delta_{xyz} = 0, \tag{11}$$

т. е.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ y'' & z'' & u'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ z'' & u'' & x'' \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0. \tag{11'}$$

Первое и третье из уравнений (11') выполняются *тождественно*, а второе дает:

$$z'' = 0. \tag{12_z}$$

Так как, дифференцируя уравнение (10), получим:

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' - k^2u'u'' = 0,$$

то, в силу условия (9′),

$$x'' = 0. \tag{12_x}$$

Дифференцируя дважды первое из уравнений (3), связывающее вейерштрассовы координаты точки, находим:

$$xx'' + yy'' + zz'' - k^2uu'' + x'^2 + y'^2 + z'^2 - k^2u'^2 = 0,$$

откуда, на основании (8) и (9) получаем:

$$u'' = \frac{1}{k^2}. \tag{12_u}$$

Следовательно, к (8) и (9) нужно еще прибавить условия

$$x'' = 0, \quad z'' = 0, \quad u'' = \frac{1}{k^2}. \tag{12_{xzu}}$$

Касательная прямая определяется двумя из трех следующих уравнений:

$$\delta_{zu}X - \delta_{xu}Z = \delta_{zx}U, \tag{13_y}$$

$$\delta_{zu}Y - \delta_{yu}Z = \delta_{zy}U, \tag{13_x}$$

$$\delta_{yu}X - \delta_{xu}Y = \delta_{yx}U, \tag{13_z}$$

где $\delta_{zu} = zu' - z'u$ и т. д.

Чтобы определить проекцию касательной в бесконечно близкой точке M' (которая вместе с тем является и касательной в проекции этой точки), мы должны совершить преобразование координат от x_1, y_1, z_1, u_1 к $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} = 0, \bar{u}$, пользуясь формулами, связывающими элементы *трипрямоугольника*, т. е. полагая

$$\bar{x} = \frac{x}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \bar{y} = \frac{y}{\sqrt{1+z^2}}, \quad \bar{u} = \frac{u}{\sqrt{1+z^2}}. \tag{14}$$

Для бесконечно близкой точки M_1 z_1 — бесконечно малая выше второго порядка, и последние формулы дают:

$$\bar{x}_1 = x_1, \quad \bar{y}_1 = y_1, \quad \bar{u}_1 = u_1. \tag{14′}$$

Тогда из уравнения (13) следует:

$$\bar{\delta}_{y_1u_1}\bar{X} - \bar{\delta}_{x_1u_1}\bar{Y} = \bar{\delta}_{y_1x_1}\bar{U}, \tag{13}$$

где

$$\bar{\delta}_{y_1u_1} = \bar{y}_1\bar{u}_1' - \bar{y}_1'\bar{u}_1 = y_1u_1' - y_1'u_1.$$

Здесь следует положить:

$$x_1 = x + x'\Delta s + x''\frac{\Delta s^2}{2}, \quad x_1' = x' + x''\Delta s,$$

$$y_1 = y + y'\Delta s + y''\frac{\Delta s^2}{2}, \quad y_1' = y' + y''\Delta s,$$

$$u_1 = u + u'\Delta s + u''\frac{\Delta s^2}{2}, \quad u_1' = u' + u''\Delta s$$

или, в силу (8) и (9),

$$\left.\begin{aligned} &x_1 \equiv \Delta s, \quad x_1' \equiv 1, \\ &y_1 \equiv y'' \frac{(\Delta s)^2}{2}, \quad y_1' \equiv y'' \Delta s, \\ &u_1 \equiv 1 + \frac{(\Delta s)^2}{2k^2}, \quad u_1' \equiv \frac{1}{k^2} \Delta s. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Отбрасывая бесконечно малые второго порядка, получим:

$$\bar{\delta}_{y_1 u_1} \equiv -y'' \Delta s, \quad \bar{\delta}_{x_1 u_1} \equiv -1, \quad \bar{\delta}_{x_1 y_1} \equiv 0.$$

Уравнение (13_z) приводится к виду

$$-y'' \Delta s \overline{X} + \overline{Y} = 0. \tag{16}$$

Угол, образуемый этой прямой с прямой

$$0 \cdot \overline{X} + 1 \cdot \overline{Y} + 0 \cdot \overline{Z} - k^2 \cdot 0 \cdot \overline{U} = 0,$$

определяется по формулам

$$\cos \Delta\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{y''^2 (\Delta s)^2 + 1}},$$

$$\sin \Delta\omega \equiv \frac{y'' \Delta s}{\sqrt{y''^2 (\Delta s)^2 + 1}}.$$

Предел отношения $\frac{\Delta\omega}{\Delta s}$ при $\Delta s \to 0$

$$K_t = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s}$$

равен y'':

$$K_t = y''. \tag{17}$$

Так как, согласно формуле (4), при нашем выборе осей координат

$$K_n = \sqrt{y''^2 - \frac{1}{k^2}},$$

то

$$K_t = \sqrt{K_n^2 + \frac{1}{k^2}}. \tag{18}$$

Если положить

$$K_n = \frac{1}{k \operatorname{sh} \frac{\rho}{k}}, \tag{19}$$

назвав ρ радиусом кривизны по нормальной плоскости, то будем иметь:

$$K_t = \sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2 \operatorname{sh}^2 \frac{\rho}{k}}} = \frac{1}{k \operatorname{th} \frac{\rho}{k}}. \tag{20}$$

Полученную величину K_t будем называть кривизной по касательной.

Различие между K_t и K_n состоит в том, что K_t *всегда существует, а K_n существует только при условии пересекаемости нормальных плоскостей,* что не всегда имеет место.

§ 3. Сверхкривизна пространственной кривой

Чтобы установить по аналогии с кривизной плоской кривой понятие о сверхкривизне пространственной кривой, рассмотрим кривизну по нормали K_n проекции кривой на соприкасающуюся плоскость.

Уравнением нормали будет

$$\bar{x}_1'\bar{X} + \bar{y}_1'\bar{Y} - k^2\bar{u}_1'\bar{U} = 0$$

или

$$x_1'\bar{X} + y_1'\bar{Y} - k^2u_1'\bar{U} = 0, \tag{21}$$

и на основании соотношений (15)

$$\bar{X} + y''\Delta s\bar{Y} - k^2\frac{\Delta s}{k^2}\bar{U} = 0. \tag{22}$$

Угол же, образуемый с прямой $X = 0$ или

$$1\cdot\bar{X} + 0\cdot\bar{Y} + 0\cdot\bar{Z} - k^2 0\cdot\bar{U} = 0,$$

определяется уравнениями

$$\cos\Delta\omega \equiv \frac{1}{\sqrt{1 + y''^2(\Delta s)^2 - \frac{1}{k^2}(\Delta s)^2}},$$

$$\sin\Delta\omega \equiv \frac{\sqrt{y''^2 - \frac{1}{k^2}}\,\Delta s}{\sqrt{1 + y''^2(\Delta s)^2 - \frac{1}{k^2}(\Delta s)^2}}$$

и

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \sqrt{y''^2 - \frac{1}{k^2}} = K_n.$$

Таким образом, *кривизна по нормальной плоскости пространственной кривой совпадает с кривизной по нормали ее проекции на соприкасающуюся плоскость.*

Теперь вполне естественно за сверхкривизну считать *сверхкривизну проекции кривой на соприкасающуюся плоскость.*

Согласно доказанному в моей статье [11], в случае

$$x''^2 + y''^2 - k^2u''^2 < 0$$

геометрическое значение $K^{(n)}$ следующее:

$$K^{(n)} = \frac{1}{k}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta s}, \tag{23}$$

где $\Delta\sigma$ — кратчайшее расстояние между нормалями MN и $M'N'$. Так как выражение

$$\sqrt{k^2u''^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2},$$

так же как выражение $\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2 - k^2u''^2}$, *при преобразовании координат не меняется*, то при нашем специальном выборе координат это выражение сводится к значению $\sqrt{\frac{1}{k^2} - y''^2}$, представляющему значение сверхкривизны $K^{(n)}$ для проекции. Таким образом, имеем:

$$K^{(n)} = \sqrt{k^2 u''^2 - x''^2 - y''^2 - z''^2}\,, \qquad (24)$$

§ 4. Непосредственное определение кривизны по касательной

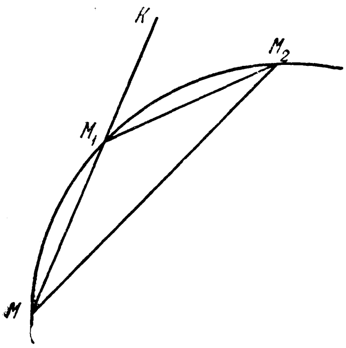
Следует взять по обе стороны от точки M_1 на равных расстояниях $\frac{\Delta s}{2}$ бесконечно близкие точки M и M_2 и взять предел отношения угла между хордами M_1M и M_2M_1, т. е. угла KM_1M_2, к дуге $\smile M_1M_2$ (фиг. 1). Совершенно так же как при изучении кривизны на плоскости, доказываем, что $\angle KM_1M_2 \equiv 2\alpha$, где $\alpha = \angle M_1MM_2$.

Уравнение прямой MM_1 определяется из условий прохождения ее через точки (x, y, z, u) и (x_1, y_1, z_1, u_1), где

$$x_1 = x + x' \frac{\Delta s}{2} + \frac{x''}{\cdot} \frac{(\Delta s)^2}{4} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u_1 = u + u' \frac{\Delta s}{2} + \frac{u''}{1\cdot 2} \frac{(\Delta s)^2}{4} + \cdots.$$



Фиг. 1

Уравнение прямой MM_2, проходящей через две точки (x, y, z, u) и (x_2, y_2, z_2, u_2), будет

$$\Delta_{yu} X + \Delta_{uz} Y + \Delta_{xy} U = 0, \qquad (25_z)$$

$$\Delta_{zu} X + \Delta_{ux} Z + \Delta_{xz} U = 0, \qquad (25_y)$$

где $\Delta_{yu} = yu_2 - y_2u$, $\Delta_{xu} = xu_2 - x_2u$ и т. д.

Если $x_2 = x + x'\Delta s + x'' \frac{(\Delta s)^2}{1\cdot 2} + \cdots$ и т.д., то

$$\Delta_{xu} = \delta_{xu}^{(01)} \Delta s + \delta_{xu}^{(02)} \frac{(\Delta s)^2}{1\cdot 2} + \cdots \text{ и т. д.}, \qquad (26)$$

где

$$\delta_{xu}^{(01)} = xu' - x'u, \qquad \delta_{xu}^{(02)} = xu'' - x''u \text{ и т. д.}$$

Для перехода к уравнению прямой MM_1 в нашем случае придется заменить Δs на $\frac{\Delta s}{2}$ и для Δ_{xu} вместо (26) взять выражение

$$\Delta_{xu} = \delta_{xu}^{(01)} \frac{\Delta s}{2} + \delta_{xu}^{(02)} \frac{(\Delta s)^2}{8} + \cdots.$$

Коэффициенты A, B, C, D в уравнении

$$AX + BY + CZ - k^2DU = 0 \qquad (27)$$

плоскости, перпендикулярной в точке M к MM_2, удовлетворяют условиям:

$$xA + yB + zC - k^2uD = 0,$$
$$\Delta_{yu} A + \Delta_{ux} B + \Delta_{xy} D = 0,$$
$$\Delta_{zu} A + \Delta_{ux} C + \Delta_{xz} D = 0,$$

откуда выводится пропорция:

$$\frac{A}{K_x} = \frac{B}{K_y} = \frac{C}{K_z} = \frac{D}{K_u},$$

где

$$K_x = -\Delta_{xu}\,[y\Delta_{yx} + z\Delta_{zx} + k^2 u\Delta_{xu}],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$K_u = -\Delta_{xu}\,[x\Delta_{xu} + y\Delta_{yu} + z\Delta_{zu}].$$

Подставляя сюда полученные выше выражения, получаем;

$$\begin{aligned} K_x &= \Delta_{xu}\,(k^2 x_2 + dx), \\ K_y &= \Delta_{xu}\,(k^2 y_2 + dy), \\ K_z &= \Delta_{xu}\,(k^2 z_2 + dz), \\ K_u &= \Delta_{xu}\,(k^2 u_2 + du), \end{aligned}$$

где

$$d = xx_2 + yy_2 + zz_2 - k^2 uu_2 = x\left(x + x'\Delta s + x''\frac{\Delta(s)^2}{2} + \cdots\right) + \cdots =$$
$$= -k^2 + \frac{xx'' + yy'' + zz'' - k^2 uu''}{2}(\Delta s)^2 + \cdots.$$

Но дифференцирование уравнения (3), связывающего вейерштрассовы координаты, дает:

$$xx' + yy' + zz' - k^2 uu' = 0,$$
$$xx'' + yy'' + zz'' - k^2 uu'' = -x'^2 - y'^2 - z'^2 + k^2 u'^2 = -1,$$

и

$$d = -k^2 - \frac{(\Delta s)^2}{2},$$

так что

$$A = e_x = k^2 x'\Delta s + (k^2 x'' - x)\frac{(\Delta s)^2}{2} + \cdots \text{ и т. д.}$$

Для получения коэффициентов $\underline{e}_x$, $\underline{e}_y$, $\underline{e}_z$, $\underline{e}_u$ в уравнении MM_1:

$$\underline{e}_x X + \underline{e}_y Y + \underline{e}_z Z - k^2 \underline{e}_u U = 0, \tag{$\underline{28}$}$$

следует только заменить Δs через $\frac{\Delta s}{2}$, так что

$$\underline{e}_x = \frac{\Delta s}{2}\left[k^2 x' + (k^2 x'' - x)\frac{\Delta s}{4} + \cdots\right] \text{ и т. д.}$$

Угол α — это угол между плоскостями ($\underline{28}$) и

$$e_x X + e_y Y + e_z Z - k^2 e_u U = 0; \tag{28}$$

$\sin\alpha$ определяется по формуле

$$\sin\alpha =$$
$$= \frac{\sqrt{(e_x\underline{e}_y - e_y\underline{e}_x)^2 + (e_x\underline{e}_z - e_z\underline{e}_x)^2 + (e_y\underline{e}_z - e_z\underline{e}_y)^2 - k^2(e_x\underline{e}_u - e_u\underline{e}_x)^2 - k^2(e_y\underline{e}_u - e_u\underline{e}_y)^2 - k^2(e_z\underline{e}_u - e_u\underline{e}_z)^2}}{\sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 - k^2 e_u^2}\,\sqrt{\underline{e}_x^2 + \underline{e}_y^2 + \underline{e}_z^2 - k^2\underline{e}_u^2}}.$$

Но

$$e_x\underline{e}_y - e_y\underline{e}_x = \frac{k^4\Delta_{yx}^{(12)} - k^2\Delta_{xy}^{(01)}}{8}(\Delta s)^3,$$

$$(k^2\Delta_{yx}^{(12)} - \Delta_{xy}^{(01)})^2 = k^4(y'x'' - y''x')^2 - 2k^2(y'x'' - y''x')(xy' - x'y) +$$
$$+ (xy' - x'y)^2.$$

Рассмотрим сумму квадратов

$$(y'x''-y''x')^2+\cdots;$$

член с x'^2 дает: $x'^2(K_n^2-x''^2)$, где

$$K_n^2=x''^2+y''^2+z''^2-k^2u''^2.$$

Собирая в группы члены типа $y'y''x'x''$, получаем:

$$x'x''[-y'y''-z'z''+k^2u'u'']=x'^2x''^2.$$

В результате имеем:

$$\sum(y'x''-y''x')^2=(x'^2+y'^2+z'^2-k^2u'^2)(x''^2+y''^2+z''^2-k^2u''^2)=K_n^2,$$

$$\sum(xy'-x'y)^2=(x^2+y^2+z^2-k^2u^2)(x'^2+y'^2+z'^2-k^2u'^2)=-k^2.$$

Сумма $S=\sum(y'x''-y''x')(xy'-x'y)$ преобразуется на основании следующего легко проверяемого тождества:

$$\sum_i a_i^2\sum_i A_iB_i=\sum_i A_ia_i\sum_i B_ia_i+\frac{1}{2}\sum_{k,l}(a_kB_l-a_lB_k)(a_kA_l-a_lA_k),$$

которое дает:

$$S=(x'^2+y'^2+z'^2-k^2u'^2)(xx''+yy''+zz''-k^2uu'')-$$

$$-(xx'+yy'+zz'-k^2uu')(x'x''+y'y''+z'z''-k^2u'u'')=-1.$$

Далее,

$$e_x^2+e_y^2+e_z^2-k^2e_u^2=(\Delta s)^2k^4(x'^2+y'^2+z'^2-k^2u'^2)=(\Delta s)^2k^4,$$

$$\underline{e}_x^2+\underline{e}_y^2+\underline{e}_z^2-k^2\underline{e}_u^2=\frac{(\Delta s)^2}{4}k^4,$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{K_n^2k^2+1}}{4k}\Delta s.$$

Но $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\dfrac{\sin\Delta\omega}{\sin\alpha}=2$. Поэтому

$$K_t=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\Delta\omega}{\frac{\Delta s}{2}}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{2\sin\alpha}{\frac{\Delta s}{2}}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{4\sin\alpha}{\Delta s}=\sqrt{\frac{K_n^2k^2+1}{k^2}}$$

и

$$K_t=\sqrt{K_n^2+\frac{1}{k^2}}. \tag{18}$$

§ 5. Кручение

Кручение следует определять, как предел отношения угла, образованного двумя соприкасающимися плоскостями в двух бесконечно близких точках, к дуге. Уравнениями этих соприкасающихся плоскостей будут

$$\delta_{yzu}^{(012)} X - \delta_{zux}^{(012)} Y + \delta_{uxy}^{(012)} Z - \delta_{xyz}^{(012)} U = 0, \tag{29}$$

$$\bar{\delta}_{yzu}^{(012)} X - \bar{\delta}_{zux}^{(012)} Y + \bar{\delta}_{uxy}^{(012)} Z - \bar{\delta}_{xyz}^{(012)} U = 0, \tag{$\overline{29}$}$$

где

$$\delta_{yzu}^{(012)} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.},$$

$$\bar{\delta}_{yzu}^{(012)} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_1' & y_1' & z_1' \\ x_1'' & y_1'' & z_1'' \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.},$$

причем

$$\bar{\delta}_{yzu}^{(012)} = \delta_{yzu}^{(012)} + \delta_{yzu}^{(013)} \Delta s + \ldots,$$

$$\delta_{yzu}^{(013)} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x' & y' & z' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}.$$

Замечая, что угол $\Delta\omega$ между плоскостями (29) и ($\overline{29}$) определяется по формуле

$$\cos \Delta\omega = \frac{1}{k^2} \frac{k^2 \delta_{yzu}^{(012)} \bar{\delta}_{yzu}^{(012)} + k^2 \delta_{zux}^{(012)} \bar{\delta}_{zux}^{(012)} + k^2 \delta_{uxy}^{(012)} \bar{\delta}_{uxy}^{(012)} - \delta_{xyz}^{(012)} \bar{\delta}_{xyz}^{(012)}}{\sqrt{\delta_{yzu}^{(012)2} + \delta_{zux}^{(012)2} + \delta_{uxy}^{(012)2} + \frac{1}{k} \delta_{xyz}^{(012)2}} \sqrt{\bar{\delta}_{yzu}^{(012)2} + \cdots}},$$

$$\sin \Delta\omega = \frac{\sqrt{k^4 \left(\delta_{yzu}^{(012)} \bar{\delta}_{xzu}^{(012)} - \bar{\delta}_{yzu}^{(012)} \delta_{xzu}^{(012)}\right)^2 + \cdots}}{\sqrt{k^2 \delta_{yzu}^{(012)2} + \cdots} \sqrt{k^2 \bar{\delta}_{yzu}^{(012)2} + \cdots}},$$

получаем для кручения формулу

$$T = \frac{\sqrt{k^4 P_{yx}^{(0123)2} + k^4 P_{xz}^{(0123)2} + \cdots - k^2 P_{xu}^{(0123)2} - \cdots}}{k^2 \delta_{yzu}^{(012)2} + k^2 \delta_{zux}^{(012)2} + k^2 \delta_{uxy}^{(012)2} - \delta_{xyz}^{(012)2}}, \tag{30}$$

где

$$P_{yx}^{(0123)} = \delta_{yzu}^{(012)} \delta_{xzu}^{(013)} - \delta_{xzu}^{(012)} \delta_{yzu}^{(013)} \quad \text{и т. д.}$$

Конечно, значение T не зависит от выбора осей координат. Ниже мы выведем значение T при выборе системы координат § 2.

Если мы теперь укажем выражение U, тоже не зависимое от выбора осей координат, причем окажется при специальном их выборе, что

$$T = U, \tag{31}$$

то равенство (31) будет оставаться справедливым и во всякой системе координат. Таким выражением, как мы увидим ниже, окажется

$$U=\frac{\begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x' & y' & z' & u' \\ x'' & y'' & z'' & u'' \\ x''' & y''' & z''' & u''' \end{vmatrix}}{K_t^2}=\frac{D}{K_t^2}. \tag{32}$$

В самом деле, при преобразовании координат мы совершаем замену

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_1x+b_1y+c_1z+d_1u_1, \\ y_1 &= a_2x+b_2y+c_2z+d_2u_2, \\ z_1 &= a_3x+b_3y+c_3z+d_3u_3 \\ u_1 &= a_4x+b_4y+c_4z+d_4u_4, \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

причем определитель преобразования

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}=1.$$

Действительно, всякое преобразование сводится к последовательности вращений осей и скольжений, совершаемых по формулам:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, & x_1 &= x\operatorname{ch}\alpha + u_1\operatorname{sh}\alpha, \\ y_1 &= x\sin\alpha - y\cos\alpha, & y_1 &= y, \\ z_1 &= z, & z_1 &= z, \\ u_1 &= u; & u_1 &= x_1\operatorname{sh}\alpha + u\operatorname{ch}\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

с определителями $\delta_1, \delta_2, \ldots$, равными единице. Но тогда и $\Delta=\delta_1\delta_2\delta_3\ldots=1$. Далее,

$$D_1=\Delta D=D. \tag{35}$$

Таблицу § 2:

$$\begin{aligned} &x=0, \quad y=0, \quad z=0, \quad u=1, \\ &x'=1, \quad y'=0, \quad z'=0, \quad u'=0, \\ &x''=0, \quad y''=z''=0, \quad u''=\frac{1}{k^2}, \end{aligned} \tag{36}$$

следует еще пополнить значениями x''', y''', z''', u'''.

Прежде всего уравнение (3), связывающее вейерштрассовы координаты, дает после трехкратного дифференцирования:

$$xx'''+yy'''+zz'''-k^2uu'''=-(x'x''+y'y''+z'z''-k^2u'u''). \tag{*}$$

Дифференцируя же дважды равенство

$$x'^2+y'^2+z'^2-k^2u'^2=1,$$

имеем:

$$x'x'''+y'y'''+z'z'''-k^2u'u'''=-(x''^2+y''^2+z''^2-k^2u''^2)=-K_n^2. \tag{**}$$

Принимая во внимание равенства (36), из соотношения (*) получаем:

$$u''' = 0, \tag{$36_{u'''}$}$$

а из соотношения (**) получим:

$$x''' = \frac{1}{k^2} - y''^2. \tag{$36_{x'''}$}$$

Но тогда

$$\delta^{(012)}_{yzu} = 0, \quad \delta^{(012)}_{xzu} = 0,$$

$$\delta^{(012)}_{xyu} = \begin{vmatrix} x & y & u \\ x' & y' & u' \\ x'' & y'' & u'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & y'' & \frac{1}{k^2} \end{vmatrix} = y'',$$

$$\delta^{(012)}_{xyz} = 0.$$

Из всех членов в знаменателе T остается только один —

$$k^2 \delta^{(012)^2}_{xyu} = k^2 y''^2.$$

Из членов же, стоящих под знаком радикала в числителе, остается только

$$k^4 \delta^{(012)^2}_{xyu} \delta^{(013)^2}_{xzu} = k^4 y''^2 z'''^2,$$

так как, на основании равенств (36), ($36_{x'''}$), ($36_{u'''}$),

$$\delta^{(013)}_{yzu} = 0, \quad \delta^{(013)}_{xzu} = z''', \quad \delta^{(013)}_{xyu} = y''', \quad \delta^{(013)}_{xyz} = 0.$$

Таким образом,

$$T = \frac{z'''}{y''}. \tag{37}$$

Обращаемся теперь к U (см. формулу (32)). При системе координат, указанной в § 2, $K_t = y''$, а числитель U равен

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y'' & 0 & \frac{1}{k^2} \\ x''' & y''' & z''' & 0 \end{vmatrix} = y'' z''', \tag{38}$$

и мы получаем:

$$U = \frac{z'''}{y''}. \tag{39}$$

Сличая соотношения (39) и (37), замечаем, что

$$T = U.$$

Таким образом, имеем окончательную формулу:

$$T = \frac{D}{K_t^2}, \tag{32'}$$

где

$$D = \begin{vmatrix} x & y & z & u \\ x' & y' & z' & u' \\ x'' & y'' & z'' & u'' \\ x''' & y''' & z''' & u''' \end{vmatrix}.$$

§ 6. Полная кривизна

Под полной кривизной мы будем понимать предел отношения угла между спрямляющими плоскостями в точках $M(x, y, z, u)$ и $M'(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z, u+\Delta u)$ к соответствующей дуге при бесконечном сближении этих точек.

Уравнением спрямляющей плоскости является

$$(k^2x''-x)X+(k^2y''-y)Y+(k^2z''-z)Z-k^2(k^2u''-u)U=0. \quad (40)$$

В самом деле, эта плоскость

1) проходит через точку (x, y, z, u), так как

$$(x-k^2x'')x+(y-k^2y'')y+(z-k^2z'')z-k^2(u-k^2u'')u=$$
$$=-(xx''+yy''+zz''-k^2uu'')k^2+(x^2+y^2+z^2-k^2u^2)=0,$$

в силу того, что

$$xx''+yy''+zz''-k^2uu''=-1 \quad \text{и} \quad x^2+y^2+z^2-k^2u^2=-k^2;$$

2) перпендикулярна нормальной плоскости

$$x'X+y'Y+z'Z-k^2u'U=0,$$

так как

$$(x-k^2x'')x'+(y-k^2y'')y'+(z-k^2z'')z'-k^2(u-k^2u'')u'=$$
$$=(xx'+yy'+zz'-k^2uu')-k^2(x'x''+y'y''+z'z''-k^2u'u'')=0,$$

в силу того, что каждая из скобок равна нулю;

3) перпендикулярна к соприкасающейся плоскости, так как

$$x\delta_{yzu}-y\delta_{zux}+z\delta_{uxy}-u\delta_{xyz}=0,$$
$$x''\delta_{yzu}-y''\delta_{zux}+z''\delta_{uxy}-u''\delta_{xyz}=0.$$

Мы не будем выводить очень сложной в общем случае формулы для полной кривизны, но дадим формулу для специального выбора осей координат § 2.

В этом случае уравнением спрямляющей плоскости будет

$$Y=0 \text{ или } 0\cdot X+1\cdot Y+0\cdot Z-k^2\cdot 0\cdot U=0.$$

Уравнением спрямляющей плоскости в бесконечно близкой точке будет

$$[x+x'\Delta s+\cdots-k^2(x''+x'''\Delta s)+\cdots]X+$$
$$[y+y'\Delta s+\cdots-k^2(y''+y'''\Delta s)+\cdots]Y+$$
$$[z+z'\Delta s+\cdots-k^2(z''+z'''\Delta s)+\cdots]Z-$$
$$-k^2[u+u'\Delta s+\cdots-k^2(u''+u'''\Delta s)+\cdots]U=0,$$

а, в силу уравнений (36),

$$k^2y''^2\Delta sX+(-k^2y''-k^2y'''\Delta s)Y+(-k^2z'''\Delta s)Z+0\cdot U=0.$$

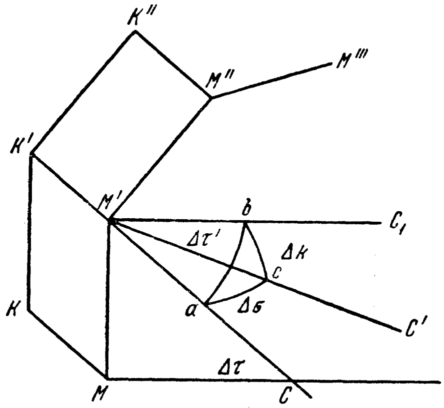
Если $\Delta\omega$ — угол между спрямляющими плоскостями в точках M и M', то

$$\cos\Delta\omega \equiv -\frac{k^2y'' + k^2y'''\Delta s}{\sqrt{(k^2y'' + k^2y'''\Delta s)^2 + (k^2z''')^2(\Delta s)^2 + k^4y''^4(\Delta s)^2}},$$

$$\sin\Delta\omega \equiv \frac{k^2\sqrt{z'''^2 + y''^4}}{\sqrt{(k^2y'' + k^2y'''\Delta s)^2 + \cdots}}\Delta s,$$

$$\varkappa = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\sin\Delta\omega}{\Delta s} = \frac{\sqrt{z'''^2 + y''^4}}{y''}. \tag{41}$$

Эта формула дает возможность доказать аналог теоремы Ланкрэ, согласно которой в эвклидовом пространстве *квадрат полной кривизны равен сумме квадратов кривизны и кручения.*



Фиг. 2

В настоящем случае мы имеем:

$$\varkappa^2 = T^2 + K_t^2, \tag{42}$$

или, если от K_t перейти к K_n,

$$\varkappa^2 = T^2 + K_n^2\operatorname{ch}^2\frac{\rho}{k}. \tag{43}$$

В самом деле, при нашем выборе осей координат $K_t = y''$,

$$T = \frac{z'''}{y''} \quad \text{и} \quad K_t^2 + T^2 = \frac{z'''^2 + y''^4}{y''^2} = \varkappa^2$$

II. Синтетические исследования

§ 7. Вывод теоремы Ланкрэ

Можно дать *синтетическое* доказательство теоремы Ланкрэ, следуя по пути Шелля, исследовавшего этим приемом пространственные кривые в эвклидовом пространстве.

Взяв четыре бесконечно близкие точки M, M', M'', M''', мы проводим прямую MC в плоскости $MM'M''$ перпендикулярно MM'. В пределе при бесконечном сближении точек M, M', M'' плоскость $MM'M''$ обращается в соприкасающуюся плоскость, а MC — в главную нормаль в точке M (фиг. 2). Пусть теперь $M'C' \perp M'M''$ в плоскости $M'M''M'''$;

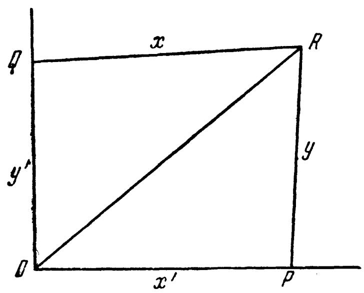
в пределе $M'M''M'''$ — соприкасающаяся плоскость, а $M'C'$ — главная нормаль в точке M'. Если, далее, $M'C \perp M'M''$ в плоскости $MM'M''$, то угол $C'M'C$ будет углом между плоскостями $MM'M''$ и $M'M''M'''$ $\Delta\bar{\sigma}$, и его можно принять за угол $\Delta\sigma$ между соприкасающимися плоскостями в точках M, M'. Это следует понимать не в том смысле, что $\Delta\bar{\sigma} \equiv \Delta\sigma$, а так, что эти бесконечно малые величины эквивалентны, т. е. отличаются на бесконечно малые высших порядков, и поэтому в отношениях одну из них можно заменить другой.

В самом деле, если σ — угол, образуемый с какой-либо постоянной плоскостью, например с XY, соприкасающейся плоскостью, то $\bar{\sigma} = \sigma + \alpha$, где α — бесконечно малая величина:

$$\Delta\bar{\sigma} = \Delta\sigma + \Delta\alpha,$$

где $\Delta\alpha$ — уже бесконечно малая не ниже второго порядка.

Проведем, далее, в плоскости $MM'M''$ прямую $M'C_1$ перпендикулярно MM'. Спрямляющая плоскость в точке M является пределом



Фиг. 3

плоскости $MKM'K'$, проходящей через хорду MM' и перпендикулярной плоскости $MM'M''$ (а потому перпендикулярной к $M'C_1$), а спрямляющая плоскость в точке M' — пределом плоскости $M'K'M''K''$, проходящей через $M'M''$ и перпендикулярной к $M'M''M'''$ (а потому перпендикулярной к $M'C'$) (фиг. 2). Угол $C'M'C_1$, т. е. Δk, таким образом, эквивалентен углу между спрямляющими плоскостями в точках M и M'.

Угол MCM', представляющий в пределе угол между нормалями к проекции на соприкасающуюся плоскость, эквивалентен углу $\Delta\tau$ между нормальными плоскостями в двух бесконечно близких точках. Но угол $CM'C_1 = \Delta\tau'$ вовсе не эквивалентен $\Delta\tau$.

Для того чтобы найти зависимость между $\Delta\tau$ и $\Delta\tau'$, следует обратиться к *трипрямоугольнику*, получающемуся, если опустить из C перпендикуляр на $M'C_1$. На основании свойств трипрямоугольника (фиг. 3),

$$\frac{\sin QRO}{\sin ROP} = \frac{\operatorname{sh} y'}{\operatorname{sh} y} = \frac{1}{\operatorname{ch} x},$$

$$\sin QOR = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} OR}, \qquad \sin ORP = \frac{\operatorname{sh} x'}{\operatorname{sh} OR}, \quad \frac{\sin QOR}{\sin ORP} = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x'} = \operatorname{ch} y.$$

В данном случае

$$\sin QOR \equiv \sin d\tau',$$
$$\sin ORP \equiv \sin d\tau$$

и

$$d\tau' \equiv \operatorname{ch} \frac{\rho}{k} d\tau.$$

Сферический треугольник, образованный окружностями, описанными радиусами, равными 1, из точки M' (abc), — прямоугольный, так как угол между плоскостями $C'M'C$ и $MM'M''$ — прямой, и поэтому

$$\Delta k^2 \equiv \Delta\sigma^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{\rho}{k} \Delta\tau^2, \tag{44}$$

откуда получаем, деля на $(\Delta s)^2$ и переходя к пределу при $\Delta s \to 0$:

$$\varkappa^2 = T^2 + \operatorname{ch}^2 \frac{\rho}{k} K_n^2$$

и, окончательно,

$$\varkappa^2 = T^2 + K_t^2. \tag{45}$$

Конечно, *тождество* это, связывающее выражения для $\varkappa$, T и K_t, должно оставаться справедливым и в том случае, когда K_n *мнимо*, а K_t *вещественно*, т. е. в случае *сверхкривизны.*

§ 8. Построение радиуса полной кривизны

Обозначая через ρ_t радиус кривизны по касательной, через r — радиус кручения и через R — радиус полной кривизны, которые определяются из уравнений

$$K_t = \frac{1}{k \operatorname{sh} \frac{\rho_t}{k}}, \quad T = \frac{1}{k \operatorname{sh} \frac{r}{k}}, \quad \varkappa = \frac{1}{k \operatorname{sh} \frac{R}{k}}, \tag{46}$$

мы получаем уравнение

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{R}{k}} = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{r}{k}} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\rho_t}{k}}. \tag{47}$$

Интересно отметить, что в пространстве Лобачевского остается в силе построение Шелля.

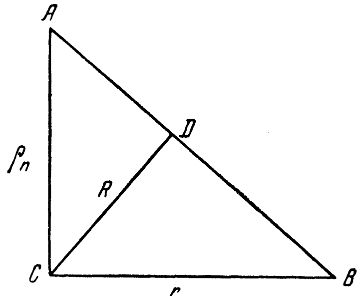
R является перпендикуляром, опущенным из вершины прямого угла на гипотенузу в прямоугольном треугольнике, катеты которого — r и ρ_n (фиг. 4). Из рассмотрения треугольников BCD и ACB (фиг. 4) следует, что

$$\operatorname{sh} \frac{R}{k} = \operatorname{sh} \frac{r}{k} \sin B, \quad \operatorname{th} \frac{\rho_n}{k} = \operatorname{sh} \frac{r}{k} \operatorname{tg} B.$$

Из последних равенств, учитывая соотношения (20) и (46), получаем уравнение (47).

§ 9. Тангенциальная поверхность

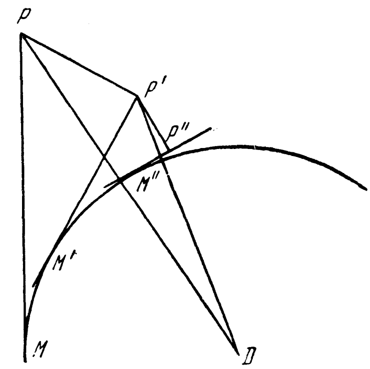
Касательные к пространственной кривой образуют *развертывающуюся* поверхность, ребром возврата которой, очевидно, является сама заданная кривая. Соприкасающаяся к последней плоскость, как про-



Фиг. 4

ходящая через три бесконечно близкие точки этой поверхности, является касательной плоскостью к этой поверхности в точках ее ребра возврата. Такую поверхность будем называть т а н г е н ц и а л ь н о й.

Взяв касательные в бесконечно близких точках M, M', M'': MP, $M'P'$, $M''P''$ (фиг. 5), опустим из P перпендикуляр PP' на $P'M'$, из



Фиг. 5

$P' - P'P'' \perp P''M''$. Проведем к плоскостям $PM'P'$, $P'M''P''$ перпендикуляры PD и $P'D'$. Эти перпендикуляры должны пересечься в одной точке D. Действительно, $P'D'$, как прямая, перпендикулярная к плоскости $P'M''P''$ (так как две бесконечно близкие касательные нужно мыслить лежащими в одной плоскости), лежит в плоскости, перпендикулярной к $M'P'$ и, следовательно, проходящей через $PP' \perp M'P'$. Но в такой плоскости, проходящей через PP', лежит и $PD \perp PM'P'$. Таким образом, $P'D'$ и PD действительно оказываются лежащими в одной плоскости и потому пересекаются (в реальной или идеальной точке) $D \equiv D'$.

Мы ограничимся только случаем реальной точки.

PP' является эквивалентом дуги нормального сечения тангенциальной поверхности. Если через $\overline{\rho}_t$ обозначить радиус кривизны *по касательной* нормального сечения тангенциальной поверхности, а через ρ_t — радиус кривизны по касательной данной кривой, то будем иметь:

$$\overline{K}_t = \frac{1}{k \operatorname{sh} \frac{\overline{\rho}_t}{k}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta \overline{s}},$$

где $\Delta\sigma$ — угол между соприкасающимися плоскостями данной кривой, $\Delta\overline{s} \equiv PP'$; с другой стороны,

$$K_t = \frac{1}{k \operatorname{sh} \frac{\rho_t}{k}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta s},$$

где $\Delta\omega$ — угол смежности касательных данной кривой. Но $\Delta\overline{s} \equiv PP' \equiv$ $\equiv \Delta\omega\, k \operatorname{sh} \frac{M'P'}{k}$,

$$k \operatorname{sh} \frac{\overline{\rho}_t}{k} = \lim_{\Delta s \to 0} k \operatorname{sh} \frac{M'P'}{k} \frac{\Delta\omega}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta\sigma} = k \operatorname{sh} \frac{r}{k}, \tag{48}$$

если взять

$$k \operatorname{sh} \frac{M'P'}{k} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta\omega} = k \operatorname{sh} \frac{\rho_t}{k},$$

т. е. $M'P'$ взять равным ρ_t — радиусу кривизны по касательной. Из соотношения (48) следует, что $\overline{\rho}_t = r$.

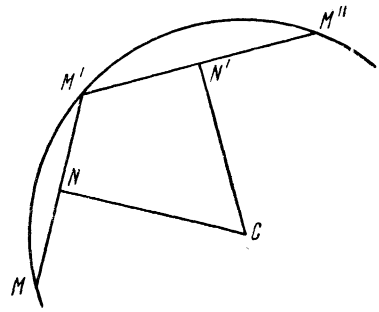
Можно сказать, что *радиус кручения кривой равен радиусу кривизны по касательной нормального сечения тангенциальной поверхности в расстоянии, равном радиусу кривизны по касательной данной кривой.*

Плоскости DPM, $DP'M'$ представляют плоскости, перпендикулярные к соприкасающимся плоскостям, и в предельном положении дают в пересечении *спрямляющую прямую.* Таким образом, все *центры кривизны различных нормальных сечений тангенциальной поверхности лежат на спрямляющей прямой.*

§ 10. Соприкасающийся круг

В том случае, когда существует кривизна по нормали, через три бесконечно близкие точки M, M', M'' можно провести круг, предельное положение которого дает соприкасающийся круг. Его центр является предельным положением точки C, получаемой в пересечении перпендикуляров NC и $N'C'$, восставленных из середин хорд MM' и $M'M''$ (фиг. 6). Радиус этого круга равен радиусу кривизны по нормали.

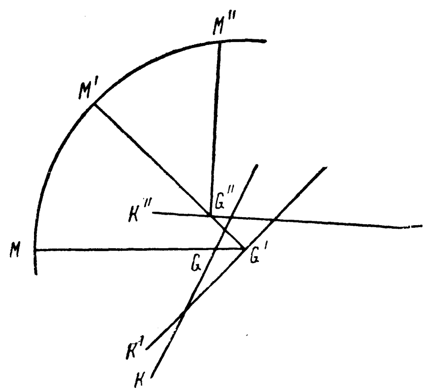
Точка C, во-первых, лежит в соприкасающейся плоскости (как проходящей через три бесконечно близкие точки M, M', M''); во-вторых, находясь в двух нормальных плоскостях, лежит на прямой их пересечения. Предельным положением пересечения двух нормальных плоскостей является **ось кривизны**. Центр кривизны, таким образом, находится на оси кривизны, а главная нормаль — предельное положение NC — перпендикулярна к оси кривизны, ибо последняя, как пере-



Фиг. 6

сечение плоскостей, перпендикулярных к прямым MM' и $M'M''$, лежащим в соприкасающейся плоскости, перпендикулярна к этой плоскости.

Если не существует кривизны по нормали, но существует *сверхкривизна*, то не существует и оси кривизны. Тогда вместо соприкаса-



Фиг. 7

ющегося круга следует брать соприкасающийся гиперцикл в соприкасающейся плоскости. Вместо оси кривизны в упомянутом смысле, следует брать то, что можно назвать **сверхосью** — прямую, перпендикулярную к двум нормальным плоскостям и измеряющую кратчайшее расстояние между ними.

Нетрудно видеть, что ось C_1C_2, соединяющая центры кривизны, должна совпадать со сверхосью, так как C_1C_2 перпендикулярна NC — прямой пересечения нормальной плоскости с соприкасающейся, к которой она перпендикулярна.

§ 11. Эволюта

Бесконечно близкие нормальные плоскости пересекаются по осям кривизны K, K', K'', ..., стоящим перпендикулярно к соприкасающимся плоскостям в центрах кривизны $C, C', C'', \ldots$; $K, K', K'', \ldots$ образуют *развертывающуюся* поверхность. Пересечения бесконечно близких осей кривизны образуют ребро возврата этой поверхности.

Нормальные плоскости к данной кривой, конечно, являются касательными плоскостями этой поверхности и соприкасающимися плоскостями для ребра возврата.

Если нормальные прямые в бесконечно близких точках пересекаются, то точки пересечения определяют э в о л ю т у, которой касаются все эти нормали, образуя, таким образом, развертывающуюся поверхность.

Возьмем поверхность осей кривизны.

Плоскость $GG'KK'$ проходит через две бесконечно близкие оси кривизны и будет нормальной плоскостью в точке M. Проведем в этой плоскости (фиг. 7) какую угодно прямую MG (которая будет вообще нормальной). Пусть G' — точка пересечения MG с осью K'. Тогда прямая $M'G'$ будет тоже нормалью, пересекающей MG. Если пересечение ее с K'' — точка G'', то $M''G''$ будет тоже нормалью, и т. д. Предельное положение $G, G', G'', \ldots$ при бесконечном сближении точек $G, G', G'', \ldots$ определяет эволюту.

Так как первая нормаль MG берется *совершенно произвольно*, то эволют будет бесконечное множество, но через одну определенную точку проходит только *одна* эволюта.

В случае сверхкривизны мы будем иметь для нормальных прямых тоже развертывающуюся поверхность, но такую, что роль ребра возврата будет играть огибающая прямых кратчайшего расстояния между бесконечно близкими нормалями (с в е р х э в о л ю т а).

§ 12. Поверхность главных нормалей

Поверхность главных нормалей $[n]$ кривой уже не является развертывающейся поверхностью. Главные нормали лежат в двух различных бесконечно близких плоскостях, пересекающихся по касательной, как прямой, проходящей через две бесконечно близкие точки. Сама кривая представляет пересечение этой поверхности со *спрямляющей* поверхностью, а также с *поверхностью бинормалей.*

Кривая пересекает ортогонально прямолинейные образующие поверхности $[n]$, и ее соприкасающаяся плоскость является касательной плоскостью к поверхности в точке пересечения. В самом деле, эта плоскость проходит через две касательные к поверхности в этой точке: во-первых через касательную к кривой и, во-вторых, через прямолинейную образующую.

Бинормаль нормальна к поверхности в точке кривой, так как она перпендикулярна к касательным плоскостям. Отсюда следует, что кривая является *асимптотической* линией на поверхности своих главных нормалей.

§ 13. Спрямляющая поверхность

Поверхность, которая образуется спрямляющими плоскостями, называется с п р я м л я ю щ е й п о в е р х н о с т ь ю. Пересечение двух бесконечно близких спрямляющих плоскостей представляет с п р я м л яющую прямую, являющуюся прямолинейной образующей этой поверхности. Спрямляющая плоскость перпендикулярна к главной нормали, так как главная нормаль является пересечением соприкасающейся и нормальной плоскостей.

Бесконечно близкие спрямляющие прямые лежат в одной спрямляющей плоскости. Поэтому спрямляющая поверхность является *развертывающейся*; но в противоположность тангенциальной поверхности *может не быть ребра возврата*. Это будет в том случае, если спрямляющие прямые окажутся сверхпараллельными. Тогда роль ребра возврата играет горловая кривая, образованная кратчайшими расстояниями между бесконечно близкими спрямляющими прямыми.

Посредством развертывания спрямляющей поверхности кривая превращается в прямую. Это проще всего доказывается на основании теоремы Ланкрэ. А именно, при развертывании исчезает полная кривизна. Но тогда $T=0$, $K_t=0$, а это — признак того, что кривая обращается в прямую, так как $T=0$ указывает, что она лежит в одной плоскости, а $K_t=0$ — что она сводится к прямой.

§ 14. Эвольвента

Кривая является в отношении эволюты эвольвентой. Эвольвента получается развертыванием нити, натянутой на кривую. Если точки эвольвенты — P, P', P'', ..., а соответствующие точки кривой — M, M', M'', ..., то

$$M''P' - M'P = M'M'',$$

$$M'''P'' - M''P' = M''M''' \quad \text{и т. д.}$$

Разность между расстояниями двух точек P, Q эвольвенты от соответствующих точек кривой равна дуге MN.

Нормальная плоскость к эвольвенте в точках P, P' перпендикулярна к PT, $P'T'$, а так как эти последние лежат в соприкасающихся плоскостях точек M, M', то она перпендикулярна к последним плоскостям. Так как эти плоскости проходят через касательные, то они являются спрямляющими. Но спрямляющие плоскости пересекаются по спрямляющей прямой, а нормальные плоскости — по оси кривизны. Поэтому ось кривизны эвольвенты в точке M, соответствующей точке P данной кривой, представляет спрямляющую последней в точке M, причем эта ось кривизны — общая для всех точек прямой PM. Центр кривизны эвольвенты в точке P является основанием перпендикуляра, опущенного на спрямляющую прямую.

Как и на эвклидовой плоскости, можно установить понятие о плоскостной эвольвенте. Получается оно следующим образом. Плоскость движется так, что все время остается соприкасающейся плоскостью к данной кривой, занимая положения $MM'M''$, $M'M''M'''$, ..., при которых она проходит через тройки бесконечно близких точек. Плоскостная эвольвента описывается точкой этой подвижной плоскости.

Переход этой плоскости от положения $MM'M''$ к положению $M'M''M'''$ можно мыслить, как вращение около прямой $M'M''$. При этом вращении точка P описывает дугу PP', центр которой лежит в точке C на $M'M''$ (а именно, в основании перпендикуляра PC, опущенного на $M'M''$). Плоскость $P'CP$, в которой происходит вращение, перпендикулярна к оси вращения $M'M''$, а поэтому перпендикулярна и к соприкасающейся плоскости данной кривой. Вследствие этого плоскость CPP', которая является соприкасающейся плоскостью плоскостной эвольвенты, будет нормальной плоскостью заданной кривой, и плоскостные эвольвенты пересекают под прямым углом соприкасающуюся плоскость кривой. Точка C является центром кривизны плоскостной эвольвенты.

§ 15. Соприкасающаяся сфера

Соприкасающаяся сфера является сферой, проходящей через 4 бесконечно близкие точки M, M', M'', M'''. Она содержит два соприкасающихся круга, проходящих через тройки бесконечно близких точек M, M', M''; M', M'', M'''. Центры последних — на осях кривизны K, K', причем их плоскости перпендикулярны к K и K'. Отсюда следует, что и центр соприкасающейся сферы следует искать в пересечении K и K'.

Геометрическое место центров соприкасающихся сфер представляет ребро возврата поверхности осей кривизны.

Отметим, что совершенно так же, как не всегда существует соприкасающийся круг, не всегда существует и соприкасающаяся сфера. Но в том случае, когда не существует соприкасающейся сферы, существует соприкасающаяся гиперсфера. В этом случае оси гиперциклов $MM'M''$ и $M'M''M'''$ пересекаются между собой и лежат в основной плоскости гиперсферы.

Определим угол наклонения радиуса соприкасающейся сферы к соприкасающейся плоскости и найдем его выражение через ρ и r (радиусы кривизны и кручения). Две бесконечно близкие оси кривизны CK и $C'K$ лежат в нормальной плоскости точки M' данной кривой и пересекаются в K — центре соприкасающейся сферы (фиг. 8).

Обозначая через μ угол KMC между радиусом сферы и соприкасающейся плоскостью и замечая, что $MK = M'K = R$ (R — радиус соприкасающейся сферы), а $MC = \rho$ (ρ — радиус кривизны), $M'C' = \rho + \Delta\rho$, $\angle KM'C' = \mu + \Delta\mu$, получаем из прямоугольных треугольников KMC и $KC'M'$:

$$\cos\mu = \operatorname{th}\frac{\rho}{k} : \operatorname{th}\frac{R}{k}, \tag{49}$$

$$\cos(\mu + \Delta\mu) = \operatorname{th}\frac{\rho + \Delta\rho}{k} : \operatorname{th}\frac{R}{k} \tag{50}$$

или, с точностью до бесконечно малых второго порядка,

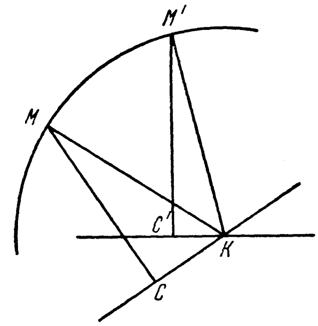
$$\operatorname{th}\frac{R}{k}(\cos\mu - \sin\mu\Delta\mu) = \operatorname{th}\frac{\rho}{k} + \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{\rho}{k}}\cdot\frac{\Delta\rho}{k}.$$

Раскрывая скобки и учитывая равенство (49), имеем:

$$-\sin\mu\,\mathrm{th}\,\frac{R}{k}=\frac{1}{k\,\mathrm{ch}^2\frac{\rho}{k}}\,\frac{\Delta\rho}{\Delta\mu}$$

или, возводя в квадрат и учитывая еще раз равенство (49),

$$\mathrm{th}^2\frac{R}{k}=\mathrm{th}^2\frac{\rho}{k}+\frac{1}{k^2\,\mathrm{ch}^4\frac{\rho}{k}}\left(\frac{\Delta\rho}{\Delta\mu}\right)^2. \tag{51}$$



Фиг. 8

Учитывая, что $\Delta\mu$ — угол смежности соприкасающейся плоскости, т. е.

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\mu}{\Delta s}=T=\frac{1}{k\,\mathrm{sh}\frac{r}{k}},$$

где r — радиус кручения, получим:

$$\mathrm{th}^2\frac{R}{k}=\mathrm{th}^2\frac{\rho}{k}+\frac{\mathrm{sh}^2\frac{r}{k}}{\mathrm{ch}^4\frac{\rho}{k}}\left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2, \tag{52}$$

т. е. мы получили выражение R через r, ρ и $\frac{d\rho}{ds}$. Кроме того, обозначая CK через h, получим из прямоугольного треугольника KCM:

$$\mathrm{th}\,\frac{h}{k}=\mathrm{tg}\,\mu\,\mathrm{sh}\,\frac{\rho}{k}. \tag{53}$$

Таким образом, мы можем выразить R, затем μ и, наконец, h через r, ρ и $\frac{d\rho}{ds}$.

§ 16. Кривые постоянной кривизны

В связи с изучением геометрического места (K) центров соприкасающихся сфер данной кривой (M) перейдем к изучению *кривых постоянной кривизны.*

Заметим, что в пространстве Лобачевского:

1. Соприкасающаяся плоскость (K) совпадает с нормальной плоскостью (M).

2. Нормальная плоскость (K) и соприкасающаяся плоскость (M) обе перпендикулярны к оси кривизны (M).

3. Спрямляющая плоскость (K) и спрямляющая плоскость (M) обе перпендикулярны к главной нормали (M).

4. Касательная (M) и бинормаль (K) перпендикулярны к нормальной плоскости (M) или, что то же, к соприкасающейся плоскости (K).

5. Главная нормаль (M) и главная нормаль (K) перпендикулярны к спрямляющей плоскости (K).

6. Бинормаль (M) и касательная (K) перпендикулярны к нормальной плоскости (K).

Заметим также, что в нормальной плоскости (M) находятся:

1) главная нормаль (M),

2) касательная к кривой центров кривизны (C),

3) касательная к (K) — геометрическому месту центров соприкасающихся сфер,

4) радиус MK соприкасающейся сферы.

Рассмотрим, имея все это в виду, кривые постоянной кривизны ($\rho = \text{const}$).

Из равенств

$$\operatorname{th}^2 \frac{R}{k} = \operatorname{th}^2 \frac{\rho}{k} + \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{r}{k}}{\operatorname{ch}^4 \frac{\rho}{k}} \left(\frac{d\rho}{ds}\right)^2, \tag{52}$$

$$\cos \mu = \frac{\operatorname{th} \frac{\rho}{k}}{\operatorname{th} \frac{R}{k}}, \tag{49}$$

$$\operatorname{th} \frac{h}{k} = \operatorname{tg} \mu \operatorname{sh} \frac{\rho}{k} \tag{53}$$

следует, что при $\frac{d\rho}{ds} = 0$ 1) $\mu = 0$, 2) $h = 0$.

В случае кривой (M) постоянной кривизны геометрическое место (C) центров кривизны совпадает с геометрическим местом (K) центров соприкасающихся сфер и пересекает ортогонально главные нормали.

CK — перпендикуляр к $M'C'$ — совпадает с CC', и перпендикуляр к CC' в соприкасающейся плоскости (K) совпадает с $M'C'$, т. е. *кривые постоянной кривизны имеют общие главные нормали с геометрическим местом центров кривизны* (фиг. 8).

Соприкасающаяся плоскость (K) или (C) совпадает с нормальной плоскостью (M). Но и, обратно, соприкасающаяся плоскость (M) совпадает с нормальной плоскостью (K) или (C). В самом деле, нормальная плоскость (K), проходящая через главную нормаль (K), перпендикулярна к соприкасающейся плоскости (K), проходя через главную нормаль (M) перпендикулярно к нормальной плоскости (M). Поэтому при совпадении главных нормалей (M) и (C) не только соприкасающаяся плоскость (C) является нормальной плоскостью (M), но и, обратно, соприкасающаяся плоскость (M) является нормальной плоскостью (C).

(Поступило в редакцию 28/XII 1950 г.)

Литература

1. J. L. Coolidge, The elements of non-euclidian geometry, Oxford, 1927.
2. W. Schell, Allgemeine Theorie der Kurven doppelter Krümmung, Leipzig — Berlin, 1914.
3. H. Laurent, Traité d'analyse, II, Paris, 1885.
4. Д. Д. Мордухай-Болтовской, О геометрических построениях на плоскости Лобачевского (статья в сборнике «In memoriam N. I. Lobatschevskii», Казань, 1927).
5. H. Liebman, Nicht-euklidische Geometrie, Leipzig — Berlin, 1923.
6. P. Barbarin, Les études de la géométrie non-euclidienne, Paris, 1928.
7. В. Ф. Каган, Основания геометрии, М. — Л., 1949.
8. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, v. II, parte II, Bologna, 1927.
9. Salkowski, Zur Theorie der Kurven in elliptischen Raume, Jahresber. Deutsch. Math. Verein., **21**.
10. Guichard, Sur les surfaces minima non euclidiennes, Ann. École Norm. sup., **13** (1896), 401—414.
11. Д. Д. Мордухай-Болтовской, О кривизне на плоскости Лобачевского, Ученые записки НИИ матем. и физ. РГУ, т. **IV** (1940).
12. Д. Д. Мордухай-Болтовской, О кривизне плоских кривых в пространстве Лобачевского, Юбилейный сборник Б. Я. Букреева, Киев, 1951.